به نام خدا

آزمون ریاضی ۲ (فصل اول)

مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی

۱- در دنباله $\{a_n\}$ داریم $a_{۵n-۲} = n(۲n-۱)$ مقدار $a_{۳۳} - a_{۱۳}$ را به دست آورید:

$۳۳ = ۵n-۲ \Rightarrow n=۷ \longrightarrow a_{۳۳} = ۷(۱۴-۱) = ۹۱$

$۱۳ = ۵n-۲ \Rightarrow n=۳ \longrightarrow a_{۱۳} = ۳(۶-۱) = ۱۵$

$\longrightarrow a_{۳۳} - a_{۱۳} = ۹۱-۱۵ = ۷۶$

۲- در دنباله $\{a_n\}$ اگر $a_۱=۱$ و $a_۲=۳$ و $a_{n+۲}=۲a_{n+۱}-a_n$ باشد آن‌گاه مقدار $a_{۱۰۰}$ را به دست آورید:

$a_{n+۲}-a_{n+۱} = a_{n+۱}-a_n \Longrightarrow$ دنباله حسابی باشد ، $d=a_۲-a_۱=۳-۱=۲$

$a_{۱۰۰} = a_۱+۹۹\times d = ۱+۹۹\times ۲ = ۱۹۹$

۳- در دنباله‌ی حسابی $-۳ ,\ ۲ ,\ ۷ ,\ \ldots$ جمله‌ی عمومی a_n را به دست آورید سپس مقدار جمله‌ی $(۳n+۵)$ اُم آن را به دست آورید.

$a_n = ۵n-۸$

$a_{۳n+۵} = ۵(۳n+۵)-۸ = ۱۵n+۲۵-۸ = ۱۵n+۱۷$

۴- در یک دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ اگر $a_۴+a_۸=۱۲$ و $a_{۱۰}+a_{۱۲}=۷$ باشد حاصل عبارت $a_۶+a_{۱۱}$ را به دست آورید:

$a_۴+a_۸+a_{۱۰}+a_{۱۲} = ۱۲+۷ \Rightarrow$

$(a_۱+۳d)+(a_۱+۷d)+(a_۱+۹d)+(a_۱+۱۱d)=۱۹ \Rightarrow ۴a_۱+۳۰d=۱۹ \xrightarrow{\div ۲}$

$۲a_۱+۱۵d=\frac{۱۹}{۲} \longrightarrow a_۶+a_{۱۱} = (a_۱+۵d)+(a_۱+۱۰d) = ۲a_۱+۱۵d = \frac{۱۹}{۲}$

۵- در دو دنباله‌ی حسابی زیر تعیین کنید چند جمله‌ی مشترک سه رقمی وجود دارد؟

$\begin{cases} -۱ ,\ ۳ ,\ ۷ ,\ ۱۱ ,\ \ldots & d_۱=۴ \\ ۵ ,\ ۱۱ ,\ ۱۷ ,\ \ldots & d_۲=۶ \end{cases} \longrightarrow d = ۴ \sqcup ۶ = ۱۲ ,\ a_۱=۱۱$

دنباله مشترک : $۱۱ ,\ ۲۳ ,\ ۳۵ ,\ \ldots \longrightarrow a_n = ۱۲n-۱ \longrightarrow$

اعداد سه رقمی دنباله مشترک $\longrightarrow a_۹=۱۰۷ ,\ ۱۱۹ ,\ ۱۳۱ ,\ \ldots ,\ a_{۸۳}=۹۹۵ \longrightarrow$ تعداد $= \frac{۸۳-۹}{۱}+۱ = ۷۵$

۶- اگر در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم $a_۱=۷۲$ و $۲a_{n+۱}=۳a_n$ آن‌گاه مقدار $a_{۱۰۰}$ را به دست آورید.

$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{۳}{۲} \longrightarrow$ دنباله هندسی $\longrightarrow q=\frac{۳}{۲}$ ، $a_۱=۷۲$

$a_{۱۰۰} = a_۱\times q^{۹۹} = ۷۲\times\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۹۹} = ۲^۳\times ۳^۲\times\frac{۳^{۹۹}}{۲^{۹۹}} = \frac{۳^{۱۰۱}}{۲^{۹۶}}$

۷- اگر $(3n-2)$ و $(4n-2)$ و $(5n-1)$ به ترتیب سه جمله‌ی اول یک دنباله هندسی صعودی باشند آن گاه مقدار جمله‌ی پنجم این دنباله کدام است؟

$$(4n-2)^2=(3n-2)\times(5n-1)$$

$$16n^2-16n+4=15n^2-13n+2 \Rightarrow n^2-3n+2=0 \to (n-2)(n-1)=0$$

$n=1 \xrightarrow{\text{دنباله هندسی صعودی}} 1 , 2 , 4 , \dots \to q=2 \to a_5=a_1\times q^4=1\times 2^4=16$

$n=2 \xrightarrow{\text{دنباله هندسی صعودی}} 4 , 6 , 9 , \dots \to q=\frac{3}{2} \to a_5=a_1\times q^4=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{4}$

مسئله دو جواب دارد

۸- اگر جملات a_5 و a_7 و a_{13} از دنباله حسابی $\{a_n\}$ به ترتیب با سه جمله‌ی اول یک دنباله هندسی باشند آن گاه نشان دهید در این دنباله حسابی $a_4=0$ می‌باشد.

$$(a_7)^2=a_5\times a_{13} \Rightarrow (a_1+6d)^2=(a_1+4d)\times(a_1+12d) \Rightarrow$$

$$a_1^2+36d^2+12a_1d=a_1^2+48d^2+4a_1d+12a_1d \Rightarrow 4a_1d+12d^2=0 \Rightarrow$$

$$4d(a_1+3d)=0 \xrightarrow{d\neq 0} a_1+3d=0 \Rightarrow a_4=0$$

۹- بین دو عدد $\frac{2}{3}$ و ۳ تعدادی عدد دیگر چنان درج شده است که با این دو عدد تشکیل یک دنباله هندسی نزولی می‌دهند. اگر حاصلضرب اعداد درج شده برابر ۱۲۸ باشد آن گاه مقدار هفتمین عدد درج شده چقدر است؟

دنباله هندسی نزولی: $3 , x_1 , x_2 , \dots , x_n , \frac{2}{3} \to x_7=?$

$$x_1\times x_2\times\cdots\times x_n=128 \Rightarrow (x_1\times x_n)^{\frac{n}{2}}=128 \xrightarrow{x_1\times x_n=3\times\frac{2}{3}=2} (2)^{\frac{n}{2}}=2^7 \Rightarrow$$

$$n=14 \to q^{n+1}=\frac{b}{a} \Rightarrow q^{15}=\frac{\frac{2}{3}}{3} \Rightarrow q=\sqrt[15]{\frac{2}{9}}$$

$$x_7=a_8=a_1\times q^7=3\times\left(\sqrt[15]{\frac{2}{9}}\right)^7=\sqrt[15]{3^{15}\times\frac{2^7}{9^7}}=\sqrt[15]{3^{15}\times\frac{128}{3^{14}}}=\sqrt[15]{3\times128}=\sqrt[15]{384}$$

۱۰- برای هر یک از دنباله‌های زیر یک جمله‌ی عمومی بنویسید:

الف) $\frac{2}{3} , -\frac{7}{10} , \frac{12}{17} , -\frac{17}{24} , \dots \Rightarrow a_n=(-1)^{n+1}\times\frac{5n-3}{7n-4}$

ب) $2 , 22 , -222 , -2222 , 22222 , \dots \Rightarrow a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\times\frac{10^n-1}{9}\times(-2)$

موفق باشید

قره باغی